

一种单自旋回波串信号参数估计方法

朱凯然,何学辉,吴惠阳,张 旺,苏 涛

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室,陕西西安 710071)

摘 要: 针对存在加性高斯白噪声多参数变量的单自旋回波串信号参数估计问题,提出一种参数分离化的 2-D 参数估计方法.利用 2-D 数据矩阵秩为 1 的特性,依照迭代加权最小二乘方法,从左、右主奇异值向量中以参数分离的方式分别估计出衰减因子和频率,基于最小二乘方法进一步获得信号幅度估计.该方法在相对高信噪比和/或大数据样本下可达到克拉美罗下界,且计算复杂度较低.仿真数据结果证明了算法的有效性.

关键词: 核四极矩共振; 自旋回波串; 2-D 参数估计; 加权最小二乘; 克拉美罗下界

中图分类号: O482.53; TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013)03-0456-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.03.007

An Approach for Parameter Estimation of a Single Spin Echo Train Signal

ZHU Kai-ran, HE Xue-hui, WU Hui-yang, ZHANG Wang, SU Tao

(National Lab of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: In allusion to multi-parameter estimation of a spin echo train (SET) signal in the presence of additive white Gaussian noise, a two-dimensional (2-D) parameter estimation method in a separable manner is proposed. By utilizing the rank-one property of the 2-D data matrix, the damping factor and frequency are estimated in a separable manner from the principal left and right singular vectors according to an iterative weighted least squares (WLS) method. The complex amplitude of SET is then obtained on the basis of standard least squares. The parameter estimation performance of this method achieves Cramer-Rao lower bound (CRLB) at relatively large signal-to-noise ratio (SNR) and/or data size conditions. Simulation results show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: nuclear quadrupole resonance (NQR); spin echo train (SET); two-dimensional parameter estimation; weighted least squares (WLS); Cramer-Rao lower bound (CRLB)

1 引言

核四极矩共振 (Nuclear Quadrupole Resonance, NQR) 是一种原子核物理现象^[1~10],是指原子核的非球对称部分因与核外电场梯度相互作用引起能级分裂,在外加射频 (Radio Frequency, RF) 场作用下,产生能级跃迁的过程.不同原子核有不同的 NQR 共振频率,即使同一种原子核,处在不同的物质中,或者同一种物质不同结构形式中,其共振频率也不相同.因此,一旦检测到 NQR 信号,则不但可以判明是哪种原子核,还可以判明是什么物质分子.大多数爆炸物中的氮元素 (¹⁴N) 的含量较高,例如黑索金 (Royal Demolition eXplosive, RDX) 和梯恩梯 (TriNitroToluene, TNT) 等,通过分析爆炸物中 ¹⁴N 的 NQR 谱线特征,可以作为爆炸物探测的一种有效手段.

NQR 信号通常可分为自由感应衰减 (Free Induction

Decay, FID) 信号和自旋回波 (Spin Echo, SE) 信号^[1,3~5]. 90°RF 脉冲之后,核自旋开始自由进动和弛豫,此时共振信号为 FID 信号;当在核系统上加 90°RF 脉冲,经时间 τ 再加 180°脉冲,之后产生的信号,称为 SE 信号,该信号在时间 τ 之前是上升的,在时间 τ 之后是下降的,在 τ 时刻产生 SE 峰值.图 1 为 SE 信号示意图, τ 是初始脉冲与第二个脉冲之间的间隔时间.利用复合脉冲序列可产生自旋回波串 (Spin Echo Train, SET) 信号,与需等待 $5T_1$ (T_1 为自旋-自旋弛豫时间) 才能再次得到 FID 信号相比,它能够使 NQR 信号持续更长的时间,从而,可以在短时间内使 NQR 信号的信噪比 (Signal-to-Noise Ratio, SNR) 得以改善.

目前,国内外关于 FID 信号参数估计与检测的文献相对较多^[3~6],而有关 NQR 技术中 SET 信号处理方面的文献较少^[7~10]. A Jakobsson 等人对 TNT 的 SET 信号采

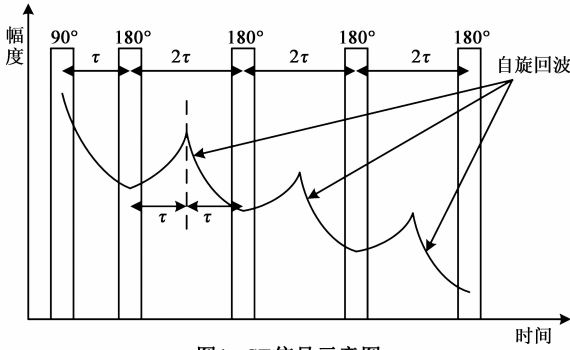


图1 SE信号示意图

用基于近似最大似然的检测器进行检测^[7,8]。然而,该算法需对最大似然代价函数进行搜索寻优,它面临高维、非线性、混合参数最优化问题,具有计算量大,局部最优等缺点。Naishadham 等人针对指数衰减和信号模型提出状态空间模型(State Space Model, SSM)方法对其进行参数估计^[11,12],该方法属系统辨识类,将观测数据模拟成自回归滑动平均(AutoRegressive Moving Average, ARMA)模型,虽具有良好的参数估计性能,但面临行增强矩阵(Hankel 块矩阵束)的奇异值分解问题,计算量较大^[11]。文献[13]针对非衰减 2-D 和多维信号模型频率估计问题,提出改进的多维折叠(Improved MultiDimensional Folding, IMDF)方法,该算法基于多维平滑和数据折叠的思想,利用特征向量的结构特征,实现多维频率参数的有效估计,同样存在增强矩阵束计算复杂度高的问题。

针对 SET 信号模型参数较多的特点,结合 SET 信号的自身规律,提出一种参数分离化的 2-D 参数估计方法。该方法首先将 SET 信号构造成 2-D 数据模型,其中 SET 回波个数作为行,采样点数作为列;然后利用 2-D 数据矩阵秩为 1 的特性,采用参数分离的方式,依照迭代加权最小二乘法,分别估计出 SET 的衰减因子,SE 的衰减因子和频率。然后,利用最小二乘法可直接解得幅度值以及初始相位。本文方法的参数估计性能在相对高 SNR 和/或大数据样本下达到 CRLB,且计算复杂度较低。

2 自旋回波串信号模型

采用如图 1 所示的自旋锁定脉冲(Pulsed Spin Locking, PSL)序列激励待测样品,得到第 m 个 SE 信号可表示为^[7~10]

$$y^m(n) = \sum_{k=1}^d \left\{ \alpha_k e^{(-\eta_k m \mu)} \rho_k^n e^{\left(\frac{-\beta_k |n - n_0|}{f_s} \right)} \right\} + w^m(n) \quad (1a)$$

$$\rho_k = \exp\left(\frac{j2\pi f_k - \eta_k}{f_s} \right) \quad (1b)$$

其中, d 为 SE 信号的谱线个数,下标 k 表示第 k 条谱线。 α_k 为 SE 信号的复值幅度值, $\alpha_k = a_k \exp(j\varphi_k)$, a_k 为模值, φ_k 为初始相位; m 表示回波串中第 m 个 SE 信号,共有 M , n 为采样点数,共有 N ,一般地, $M \leq N$, n_0 为 SE 信号达到峰值时的采样点; μ 为回波间隔,且 $\mu = 2\tau$; η_k 和 β_k 分别表示 SET 信号的衰减因子和 SE 信号的衰减因子,且 $\eta_k > 0, \beta_k > 0$; f_k 和 f_s 分别表示 SE 信号频率与数据采样率,对大多数爆炸物而言,SE 信号频率是关于温度的线性函数^[7~10],因此,SE 信号频率是一个可作为先验信息的量。 $w^m(n)$ 为第 m 个采样数据中的复高斯白噪声。实际上,式(1)所示的 SET 信号模型中 d 条谱线之间具有一定的间隔。利用 SE 信号频率作为先验信息,可以设计一窄带接收机,选择其中的某条特征谱线进行分析。为了数据处理方便,选取 SE 峰值后的信号部分,信号模型可表示为

$$s^m(n) = \alpha \exp(-\eta \mu n) \cdot \exp\left(\frac{(j2\pi f - \beta - \eta)n}{f_s} \right) \quad (2)$$

$m = 1, \dots, M; n = 1, \dots, N$

其中,式(2)内的参数含义与式(1)中的相同。

3 自旋回波串参数估计方法

将式(2)构造成以自旋回波数为行数,以采样点数为列的 2-D 数据模型,

$$r_{m,n} = s_{m,n} + w_{m,n}, m = 1, \dots, M; n = 1, \dots, N \quad (3)$$

其中,

$$s_{m,n} = \alpha \xi^m \zeta^n \quad (4a)$$

$$\xi = \exp(-\eta \mu) \quad (4b)$$

$$\zeta = \exp\left(\frac{j2\pi f - \beta - \eta}{f_s} \right) \quad (4c)$$

$s_{m,n}$ 为 SET 信号; $w_{m,n}$ 为零均值复高斯白噪声,实虚部均为未知方差 $\sigma^2/2$ 的独立同分布的实高斯过程。

式(3)可表示为矩阵形式

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} + \mathbf{W} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{M \times N}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{M \times N}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{M \times N}$, 并且 $[\mathbf{R}]_{m,n} = r_{m,n}$, $[\mathbf{S}]_{m,n} = s_{m,n}$, $[\mathbf{W}]_{m,n} = w_{m,n}$ 。从 \mathbf{S} 有规律的结构可以得到

$$\mathbf{S} = \alpha \mathbf{g} \mathbf{h}^T \quad (6)$$

其中, $\mathbf{g} = [\xi \quad \xi^2 \quad \dots \quad \xi^M]^T$ (7)

$$\mathbf{h} = [\zeta \quad \zeta^2 \quad \dots \quad \zeta^N]^T \quad (8)$$

其中, $(\cdot)^T$ 表示矩阵转置。由式(6)~(8)可以看出,由 SET 构成的 2-D 数据矩阵 \mathbf{S} 的结构规律为: \mathbf{g} 由 η 构成的实值向量,表征了 SET 信号的衰减特性; \mathbf{h} 由 f, β 和 η 构成的复值向量,它表示 SE 信号的衰减特性。从式(7)和式(8)可以看出, \mathbf{g} 和 \mathbf{h} 中的元素满足线性预测特性^[14],

$$[\mathbf{g}]_m = \xi [\mathbf{g}]_{m-1}, m = 2, 3, \dots, M \quad (9)$$

以及

$$[\mathbf{h}]_n = \zeta[\mathbf{h}]_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots, N \quad (10)$$

另一方面, \mathbf{S} 的奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)^[15]为

$$\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{V}}^H \quad (11)$$

其中, $(\cdot)^H$ 表示矩阵共轭转置, $\tilde{\mathbf{A}} = [\text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_M)$

$\mathbf{0}_{M \times (N-M)}]$ 为奇异值矩阵, $\text{diag}(\cdot)$ 为对角矩阵操作,

且 $\tilde{\lambda}_1 > \tilde{\lambda}_2 > \dots > \tilde{\lambda}_M = 0$, $\tilde{\mathbf{U}} = [\tilde{\mathbf{u}}_1 \quad \tilde{\mathbf{u}}_2 \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{u}}_M] \in$

$\mathbb{C}^{M \times M}$ 和 $\tilde{\mathbf{V}} = [\tilde{v}_1 \quad \tilde{v}_2 \quad \dots \quad \tilde{v}_N] \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 均为正交矩阵,

它们的列向量分别为对应的左、右奇异向量.由式(6)

可知, $\text{rank}(\mathbf{S}) = 1$, 其中, $\text{rank}(\cdot)$ 表示矩阵的秩, 那么式

(11)可以简化为

$$\mathbf{S} = \tilde{\lambda}_1 \tilde{\mathbf{u}}_1 \tilde{\mathbf{v}}_1^H \quad (12)$$

式(6)中 \mathbf{g} (或 \mathbf{h})与式(12)中 $\tilde{\mathbf{u}}_1$ (或 $\tilde{\mathbf{v}}_1^*$)的列张成

的子空间相同^[16], 其中 $(\cdot)^*$ 表示矩阵共轭操作.对比式

(6)与式(12)可以获得以下结论, α , \mathbf{g} 和 \mathbf{h} 可以分别对

应表示成 $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\mathbf{u}}_1$ 和 $\tilde{\mathbf{v}}_1^*$ 乘上一个未知乘法因子, 即

$$\mathbf{g} = k_g \tilde{\mathbf{u}}_1 \quad (13)$$

$$\mathbf{h}^* = k_h \tilde{\mathbf{v}}_1 \quad (14)$$

其中 k_g 和 k_h 均为未知复常数.

由 $\tilde{\mathbf{u}}_1^H \tilde{\mathbf{u}}_1 = \tilde{\mathbf{v}}_1^H \tilde{\mathbf{v}}_1 = 1$, 容易得到 $\mathbf{g}^H \mathbf{g} = |k_g|^2$, $\mathbf{h}^T \mathbf{h}^*$

$= \mathbf{h}^H \mathbf{h} = |k_h|^2$, 从而可得 $k_g = |\mathbf{g}| \exp(j\varphi_g)$ 以及 $k_h =$

$|\mathbf{h}| \exp(-j\varphi_h)$, 其中 φ_g 和 φ_h 均未知. 因此, 式(13)和

式(14)可以分别表示为

$$\mathbf{g} = |\mathbf{g}| \exp(j\varphi_g) \tilde{\mathbf{u}}_1 \quad (15)$$

$$\mathbf{h} = |\mathbf{h}| \exp(j\varphi_h) \tilde{\mathbf{v}}_1^* \quad (16)$$

将式(15)和式(16)代入式(6)并联合式(12)可以解

得

$$\tilde{\lambda}_1 = \alpha |\mathbf{g}| |\mathbf{h}| \exp(j\varphi_g) \exp(j\varphi_h) \quad (17)$$

由式(15)和式(16)可知, $\tilde{\mathbf{u}}_1$ 和 $\tilde{\mathbf{v}}_1$ 也同样具有如式

(9)和式(10)所示的线性预测特性^[14]. 依据上述理论,

可以采用参数分离的方式, 首先利用 $\tilde{\mathbf{u}}_1$ 和 $\tilde{\mathbf{v}}_1$ 分别估计

出 f , β 和 η ; 然后利用它们的估计值进一步估计出 α .

将 \mathbf{R} 分解成 $\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{V}^H$, 最优的一阶近似或 \mathbf{S} 的最小二

乘解为

$$\hat{\mathbf{S}} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^H \quad (18)$$

其中 λ_1 , \mathbf{u}_1 和 \mathbf{v}_1 分别为 $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\mathbf{u}}_1$ 和 $\tilde{\mathbf{v}}_1$ 所对应的含噪声.

由式(9)可知,

$$\mathbf{x}_1 \hat{\xi} \approx \mathbf{x}_2 \quad (19)$$

其中,

$$\mathbf{x}_1 = [[\mathbf{u}_1]_1 \quad [\mathbf{u}_1]_2 \quad \dots \quad [\mathbf{u}_1]_{M-1}]^T \quad (20)$$

$$\mathbf{x}_2 = [[\mathbf{u}_1]_2 \quad [\mathbf{u}_1]_3 \quad \dots \quad [\mathbf{u}_1]_M]^T \quad (21)$$

可解得式(19)中 ξ 的加权最小二乘估计^[17,18]为

$$\hat{\xi} = \arg \min_{\xi} (\mathbf{x}_1 \hat{\xi} - \mathbf{x}_2)^H \Phi(\xi) (\mathbf{x}_1 \hat{\xi} - \mathbf{x}_2)$$

$$= \frac{\mathbf{x}_1^H \Phi(\xi) \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_1^H \Phi(\xi) \mathbf{x}_1} \quad (22)$$

其中最优化加权矩阵 $\Phi(\xi)$ 是由残差 $(\mathbf{x}_1 \hat{\xi} - \mathbf{x}_2)$ 构造而

成, 因此 $\Phi(\xi)$ 为 ξ 的函数. 引入加权因子到误差指标

中的原因, 是为了强调那些被认为是更可靠的数据样本

的贡献^[18]. 利用式(20)和式(21), 可得 $\Phi(\xi)$ 的逆矩

$$\Phi^{-1}(\xi) = \mathbf{E}\{\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{x}^H\} = \mathbf{E}\mathbf{E}\{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^H\} \mathbf{E}^H \quad (23)$$

其中, $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \hat{\xi} - \mathbf{x}_2$, $\mathbf{E}\{\cdot\}$ 表示数学期望, 且

$$\mathbf{E} = \text{Toeplitz}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \quad (24a)$$

$$\mathbf{A} = [-\xi \quad \mathbf{0}_{1 \times (M-2)}]^T \quad (24b)$$

$$\mathbf{B} = [-\xi \quad 1 \quad \mathbf{0}_{1 \times (M-2)}] \quad (24c)$$

其中, $\text{Toeplitz}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 为 Toeplitz 矩阵操作, 且以 \mathbf{A} 为第

一列, \mathbf{B} 为第一行.

令 $\mathbf{u}_1 = \tilde{\mathbf{u}}_1 + \Delta \mathbf{u}_1$, 其中, $\Delta \mathbf{u}_1$ 是 \mathbf{u}_1 的扰动量. ξ 的

期望值满足 $\tilde{\mathbf{x}}_1 \hat{\xi} = \tilde{\mathbf{x}}_2$ 或 $\mathbf{E} \tilde{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{0}_{(M-1) \times 1}$, 那么, 式(23)等

于

$$\Phi^{-1}(\xi) = \mathbf{E}\mathbf{E}\{\Delta \mathbf{u}_1 \Delta \mathbf{u}_1^H\} \mathbf{E}^H \quad (25)$$

为了计算式(25), 由文献[17,19]可得

$$\Delta \mathbf{u}_1 \approx \tilde{\lambda}_1^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{U}}_n^H \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{v}}_1 = \tilde{\lambda}_1^{-1} (\tilde{\mathbf{v}}_1^T \otimes \tilde{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{U}}_n^H) \text{vec}(\mathbf{Q}) \quad (26)$$

其中, \otimes 表示 Kronecker 直积, \mathbf{Q} 为一非奇异变换矩阵,

且

$$\tilde{\mathbf{U}}_n = [\tilde{\mathbf{u}}_2 \quad \tilde{\mathbf{u}}_3 \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{u}}_N] \quad (27)$$

为相应的噪声子空间. 利用式(26), 推导 $\mathbf{E}\{\Delta \mathbf{u}_1 \Delta \mathbf{u}_1^H\}$ 可

得^[17,19]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\Delta \mathbf{u}_1 \Delta \mathbf{u}_1^H\} &= \tilde{\lambda}_1^{-2} (\tilde{\mathbf{v}}_1^T \otimes \tilde{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{U}}_n^H) \mathbf{E}\{\text{vec}(\mathbf{Q}) \text{vec}(\mathbf{Q})^H\} \\ &\quad (\tilde{\mathbf{v}}_1^* \otimes \tilde{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{U}}_n^H) \\ &= \tilde{\lambda}_1^{-2} (\tilde{\mathbf{v}}_1^T \otimes \tilde{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{U}}_n^H) (\sigma^2 \mathbf{I}_{MN}) (\tilde{\mathbf{v}}_1^* \otimes \tilde{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{U}}_n^H) \\ &= \tilde{\lambda}_1^{-2} \sigma^2 (\tilde{\mathbf{v}}_1^T \tilde{\mathbf{v}}_1^*) \otimes (\tilde{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{U}}_n^H \tilde{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{U}}_n^H) \\ &= \tilde{\lambda}_1^{-2} \sigma^2 \tilde{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{U}}_n^H \end{aligned} \quad (28)$$

将式(28)代入式(22), $\tilde{\lambda}_1^{-2}$ 和 σ^2 可以对消掉, 那么,

利用 $\mathbf{E} \tilde{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{0}_{(M-1) \times 1}$ 和 $\tilde{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{U}}_n^H = \mathbf{I}_M - \tilde{\mathbf{u}}_1 \tilde{\mathbf{u}}_1^H$, 式(25)所

示的加权矩阵可以简化为

$$\Phi(\xi) = (\mathbf{E} \tilde{\mathbf{U}}_n \tilde{\mathbf{U}}_n^H \mathbf{E}^H)^{-1} = (\mathbf{E} \mathbf{E}^H)^{-1} \quad (29)$$

由于 $\Phi(\xi)$ 是未知参数 ξ 的函数, 可采用迭代方式

估计 ξ , 估计过程归纳如下:

步骤 1 设置 $\Phi(\xi) = \mathbf{I}_{M-1}$.

步骤 2 利用式(22)计算 $\hat{\xi}$.

步骤 3 更新 $\xi = \hat{\xi}$, 利用式(29)计算 $\Phi(\xi)$ 更新估

计.

步骤 4 重复步骤 2, 3, 直到达到结束准则.

步骤 5 由式(4)可以估计得到 SET 的衰减因子 $\hat{\eta}$,

$$\hat{\eta} = -\frac{\text{Re}(\ln \hat{\xi})}{\mu} \quad (30)$$

其中, $\text{Re}(\cdot)$ 表示取实部操作.

对 \mathbf{v}_1 而言, 同样具有线性预测性, 可表示为

$$\mathbf{y}_1 \zeta^* \approx \mathbf{y}_2 \quad (31)$$

其中, $\mathbf{y}_1 = [[\mathbf{v}_1]_1 \quad [\mathbf{v}_1]_2 \quad \cdots \quad [\mathbf{v}_1]_{N-1}]^T$, $\mathbf{y}_2 = [[\mathbf{v}_1]_2 \quad [\mathbf{v}_1]_3 \quad \cdots \quad [\mathbf{v}_1]_N]^T$. 依据式(22) ~ (29)的推导,式(31)中 ζ 的解为

$$\hat{\zeta} = \left(\frac{\mathbf{y}_1^H \mathbf{\Gamma}(\zeta) \mathbf{y}_2}{\mathbf{y}_1^H \mathbf{\Gamma}(\zeta) \mathbf{y}_1} \right)^* \quad (32)$$

其中,

$$\mathbf{\Gamma}(\zeta) = (\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H)^{-1} \quad (33)$$

$$\mathbf{Z} = \text{Toeplitz}(\mathbf{C}, \mathbf{D}) \quad (34a)$$

$$\mathbf{C} = [-\zeta^* \quad \mathbf{0}_{1 \times (N-2)}]^T \quad (34b)$$

$$\mathbf{D} = [-\zeta^* \quad 1 \quad \mathbf{0}_{1 \times (N-2)}] \quad (34c)$$

实际上,求 $\hat{\zeta}$ 与求 $\hat{\xi}$ 一样,也需 5 步迭代处理. 那么,

$$\begin{cases} \hat{\beta} = -\hat{\eta} - \text{Re}(\ln \hat{\zeta}) f_s \\ \hat{f} = \frac{\text{Im}(\ln \hat{\zeta})}{2\pi} f_s \end{cases} \quad (35)$$

其中, $\text{Im}(\cdot)$ 表示取虚部操作.

利用 SET 衰减因子估计值 $\hat{\eta}$, SE 衰减因子估计值 $\hat{\beta}$ 以及频率估计值 \hat{f} 估计 SET 复值幅度值 α , 构造

$$\hat{\mathbf{g}} = [\hat{\xi} \quad \hat{\xi}^2 \quad \cdots \quad \hat{\xi}^M]^T \quad (36)$$

$$\hat{\mathbf{h}} = [\hat{\xi} \quad \hat{\xi}^2 \quad \cdots \quad \hat{\xi}^N]^T \quad (37)$$

那么,式(5)可近似表示为

$$\mathbf{R} \approx \alpha \hat{\mathbf{g}} \hat{\mathbf{h}}^T \quad (38)$$

将式(38)两边进行向量化,可表示为

$$\text{vec}(\mathbf{R}) \approx \alpha \hat{\mathbf{h}} \otimes \hat{\mathbf{g}} \quad (39)$$

其中, $\text{vec}(\cdot)$ 为矩阵向量化操作,由式(39)可以直接获得复值幅度值 α 的最小二乘估计值为

$$\hat{\alpha} = (\hat{\mathbf{h}} \otimes \hat{\mathbf{g}})^\dagger \text{vec}(\mathbf{R}) \quad (40)$$

其中, $(\cdot)^\dagger$ 表示矩阵伪逆运算.

4 算法进一步讨论

4.1 参数估计性能分析

依据迭代过程的收敛性, ξ 的估计值应满足式(22),即

$$\hat{\xi} = \frac{\mathbf{x}_1^H \mathbf{\Phi}(\hat{\xi}) \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_1^H \mathbf{\Phi}(\hat{\xi}) \mathbf{x}_1} \quad (41)$$

依据式(41),可构造函数 $f(\xi)$

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \mathbf{x}_1^H \mathbf{\Phi}(\xi) \mathbf{x}_1 \xi - \mathbf{x}_1^H \mathbf{\Phi}(\xi) \mathbf{x}_2 \\ &= \mathbf{x}_1^H \mathbf{\Phi}(\xi) (\mathbf{x}_1 \xi - \mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (42)$$

那么, $f(\hat{\xi}) = 0$, 对具有足够大的 SNR 和/或大数据样本而言, $\hat{\xi}$ 将会落在 ξ 的周围. 利用泰勒级数在 ξ 的周围展开 $f(\hat{\xi})$, 并保留一阶项, 可得

$$f(\hat{\xi}) \approx f(\xi) + f'(\xi)(\hat{\xi} - \xi) = 0 \quad (43)$$

其中 $f'(\xi)$ 为 $f(\xi)$ 在 $\hat{\xi} = \xi$ 处的一阶导数. 令 $\mathbf{x}_1 = \tilde{\mathbf{x}}_1 +$

$\Delta \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 = \tilde{\mathbf{x}}_2 + \Delta \mathbf{x}_2$, 其中 $\Delta \mathbf{x}_1$ 和 $\Delta \mathbf{x}_2$ 分别为 $\tilde{\mathbf{x}}_1$ 和 $\tilde{\mathbf{x}}_2$ 的扰动量, 并利用 $\tilde{\mathbf{x}}_1 \xi = \tilde{\mathbf{x}}_2$, $f(\xi)$ 可以线性表示为

$$\begin{aligned} f(\xi) &= (\tilde{\mathbf{x}}_1 + \Delta \mathbf{x}_1)^H \mathbf{\Phi}(\xi) \cdot [(\tilde{\mathbf{x}}_1 + \Delta \mathbf{x}_1) \xi - (\tilde{\mathbf{x}}_2 + \Delta \mathbf{x}_2)] \\ &\approx \tilde{\mathbf{x}}_1^H \mathbf{\Phi}(\xi) (\Delta \mathbf{x}_1 \xi - \Delta \mathbf{x}_2) \\ &\approx \tilde{\mathbf{x}}_1^H \mathbf{\Phi}(\xi) \mathbf{\Xi} \Delta \mathbf{u}_1 \end{aligned} \quad (44)$$

另外, 依据式(42), $f'(\xi)$ 可近似表示为

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \mathbf{x}_1^H \mathbf{\Phi}(\xi) \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^H \mathbf{\Phi}(\xi) (\mathbf{\Phi}^{-1}(\xi))' \\ &\quad \times \mathbf{\Phi}(\xi) (\mathbf{x}_1 \xi - \mathbf{x}_2) \\ &\approx \tilde{\mathbf{x}}_1^H \mathbf{\Phi}(\xi) \mathbf{x}_1 \end{aligned} \quad (45)$$

结合式(43) ~ (45), 可解得

$$\hat{\xi} \approx \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)} \approx \xi - \frac{\tilde{\mathbf{x}}_1^H \mathbf{\Phi}(\xi) \mathbf{\Xi} \Delta \mathbf{u}_1}{\tilde{\mathbf{x}}_1^H \mathbf{\Phi}(\xi) \mathbf{x}_1} \quad (46)$$

由于 $\tilde{\mathbf{x}}_1^H \mathbf{\Phi}(\xi) \tilde{\mathbf{x}}_1$ 具有确定性, 且 $\text{E}\{\Delta \mathbf{u}_1\} = \mathbf{0}_{(M-1) \times 1}$, 显然, $\text{E}\{\hat{\xi}\} \approx \xi$. 因此, 在高 SNR 条件和/或大数据样本下, $\hat{\xi}$ 是近似无偏的. 利用式(23)和式(46), $\hat{\xi}$ 的方差可表示为

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\xi}) &= \text{E}\{(\hat{\xi} - \xi)(\hat{\xi} - \xi)^*\} \\ &\approx \frac{\tilde{\mathbf{x}}_1^H \mathbf{\Phi}(\xi) \mathbf{\Xi} \text{E}\{\Delta \mathbf{u}_1 \Delta \mathbf{u}_1^H\} \mathbf{\Xi}^H \mathbf{\Phi}(\xi) \tilde{\mathbf{x}}_1}{(\tilde{\mathbf{x}}_1^H \mathbf{\Phi}(\xi) \tilde{\mathbf{x}}_1)^2} \\ &= \frac{\tilde{\mathbf{x}}_1^H \mathbf{\Phi}(\xi) (\tilde{\lambda}_1^{-2} \sigma^2 \mathbf{\Phi}^{-1}(\xi)) \mathbf{\Phi}(\xi) \tilde{\mathbf{x}}_1}{(\tilde{\mathbf{x}}_1^H \mathbf{\Phi}(\xi) \tilde{\mathbf{x}}_1)^2} \\ &= \frac{\tilde{\lambda}_1^{-2} \sigma^2}{\tilde{\mathbf{x}}_1^H \mathbf{\Phi}(\xi) \tilde{\mathbf{x}}_1} \end{aligned} \quad (47)$$

同样可以推导出 $\hat{\zeta}$ 的方差为

$$\text{var}(\hat{\zeta}) = \frac{\tilde{\lambda}_1^{-2} \sigma^2}{\mathbf{y}_1^H \mathbf{\Gamma}(\zeta) \mathbf{y}_1} \quad (48)$$

4.2 SET 信号的回波个数与采样点数讨论

SET 信号数据矩阵的大小会直接影响到 2-D 参数分离估计方法的参数估计性能, 但 SET 信号的自旋回波个数与采样点数是相对确定的, 这是由待测样品和激励序列所决定的. 对大多数待测样品而言, SET 信号的衰减常数 T_{2e} 随脉冲间隔 2τ 的减少而增加, 增加 T_{2e} 是为了获得更多个 SE 信号, 以便提高 SNR^[1,5]. 然而, 脉冲间隔 2τ 是有基本限制的 (例如探头恢复时间以及 SE 信号持续时间), 如图 1 所示. 故此, 在给定待测样品的种类以及激励序列的情况下, 相应的 SET 信号的自旋回波个数和采样点数是相对确定的 (一般地采样点数不小于自旋回波个数).

4.3 计算量分析

SET 信号 2-D 参数分离估计方法计算复杂度低, 该方法的计算量主要集中在对 2-D 数据矩阵的 SVD 上, 矩阵 $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 的 SVD 需要 $O(N^3)$ 浮点运算. 另外, 在采用迭代加权最小二乘方法估计 ξ 和 ζ 时, 仅需 2 ~ 3 次迭代运算就能收敛^[17,18]. 文献[11]所提出的 SSM 算法, 需要对 2-D 原始数据矩阵构造行增强矩阵. 由矩阵

$R \in \mathbb{C}^{M \times N}$ 构造出的行增强矩阵大小为 $\frac{MN}{4} \times (\frac{M}{2} + 1) \cdot (\frac{N}{2} + 1)$. 文献[13]方法需要对 2-D 原始数据矩阵分别构造行增强矩阵和列增强矩阵, 行-列增强矩阵束的大小为 $\frac{MN}{2} \times (\frac{M}{2} + 1) \cdot (\frac{N}{2} + 1)$. 文献[11]方法和文献[13]方法对增强矩阵进行 SVD, 均需 $O(N^6)$ 浮点运算. 由此可见, 与文献[11, 13]方法相比, 本文方法具有较低的计算复杂度.

5 计算机仿真

产生仿真数据验证本文方法的有效性, 并与文献[11]方法和文献[13]方法比较参数估计性能. 参照文献[7, 8]给出式(2)所示 SET 信号的参数: $\alpha = 0.39\exp(-j0.75)$, $\eta = 21.26$, $\beta = 480$, $f = 47.46087\text{kHz}$, $f_s = 200\text{kHz}$, $M = 32$, $N = 256$, $\tau = \frac{N}{f_s}$, 相应的 $\mu = 2\tau$. 信号能量定义为 $P_s = \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |s_{m,n}|^2$, 加入相应 SNR 的复高斯白噪声. 将均方差 (Mean Square Error, MSE) 作为参数估计性能的评价准则, 式(47)和式(48)分别作为 $\hat{\xi}$ 和 $\hat{\zeta}$ 的 CRLB.

如 4.2 节所述, 在 SET 信号给定最大回波数(32)以及最大采样点数(256)的前提下, 分析本文方法的参数估计性能随自旋回波个数以及采样点数的变化关系. 在自旋回波个数分别为 16, 32 的前提下, 采样点数从 32 变化到 256, 步长为 16. SNR 为 20dB, 每个组合进行 1000 次蒙特卡洛实验. 图 2 为本文方法参数估计性能随自旋回波个数和采样点数的变化关系, 从图中可以看出, 在 M 一定的情况下, 随着 N 的增加, 性能得到大幅度提高; 在 N 一定的情况下, 随着 M 的增加, 性能也有明显地改善, 尤其是 SET 信号 ξ 参数估计性能.

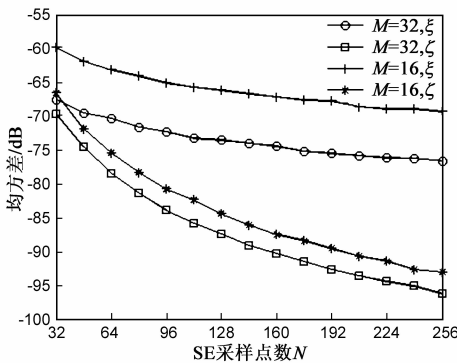


图2 参数估计性能随自旋回波个数和采样点数的变化关系

由 4.3 节可知, 文献[11]方法和文献[13]方法中增强矩阵的大小由原始 2-D 数据矩阵的大小所决定的, 为了它们能够进行有效地计算, 选取 $(M, N) = (32,$

32). SNR 变化范围 $-5\text{dB} \sim 20\text{dB}$, 步进长度为 1dB, 每个 SNR 下进行 1000 次蒙特卡洛实验.

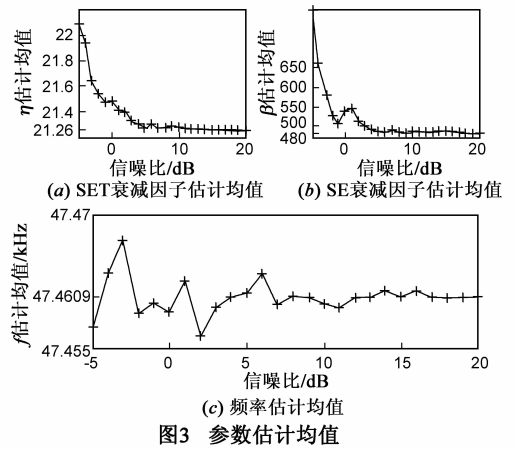
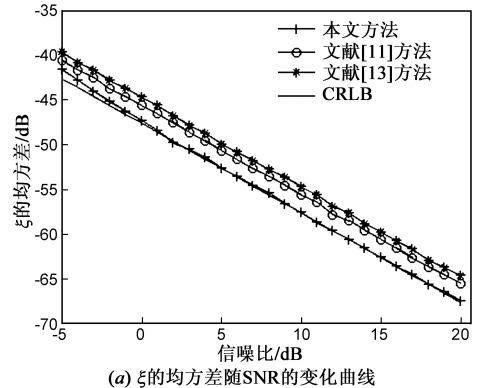


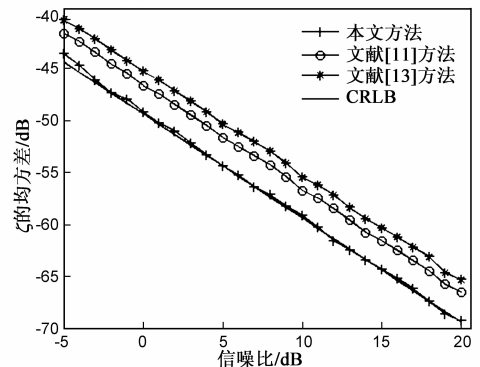
图3 参数估计均值

图 3(a) ~ (c) 分别为 SET 衰减因子估计均值、SE 衰减因子估计均值以及频率估计均值. 从图 3(a) 和图 3(c) 可以看出, 参数估计值均落在真值附近, 且偏差很小. 图 3(b) 表明, 在低 SNR ($-5\text{dB} \sim 0\text{dB}$) 下, SE 衰减因子估计值易受噪声影响, 估计值偏离真值很大, 且随 SNR 的增加, 估计值趋于真值; 当在较高 SNR 下 ($1\text{dB} \sim 20\text{dB}$) 下, 随着 SNR 的增加, 估计值在真值附近起伏, 且偏差很小.

图 4 比较了本文方法与文献[11]方法和文献[13]方法的参数估计性能, 并分析了本文方法参数估计的



(a) ξ 的均方差随 SNR 的变化曲线



(b) ζ 的均方差随 SNR 的变化曲线

图4 参数估计性能比较

均方差与 CRLB 之间的差异.图 4(a)为 ξ 的均方差随 SNR 的变化曲线,从图中可以看出,本文方法的参数估计性能优于文献[11]方法以及文献[13]方法,在低 SNR ($-5\text{dB} \sim 0\text{dB}$)下,随着 SNR 的增加, ξ 的均方差趋近 CRLB;当在较高 SNR 下($1\text{dB} \sim 20\text{dB}$)下,随着 SNR 的增加, ξ 的均方差几乎与 CRLB 重合.图 4(b)为 ζ 的均方差随 SNR 的变化曲线,从图中可以看出,本文方法的参数估计性能优于文献[11]方法以及文献[13]方法,且随着 SNR 的增加, ζ 的均方差几乎与 CRLB 重合,这与图 3 中的规律一致.这是因为,本文方法中的迭代加权最小二乘使得参数估计性能进一步提高,而文献[11]方法和文献[13]方法均为子空间方法,分别利用特征值和特征向量的结构特征得到参数估计值,它们的解实际上是总体最小二乘意义下的最优解^[11~13].从图 2~4 的结果可以看出,本文方法在相对高 SNR 和/或大数据样本下,能有效地实现 SET 信号参数的精确估计.

6 结论

本文针对加性高斯白噪声中多参数变量的单 SET 信号参数估计问题,提出参数分离化的 2-D 参数估计方法.该方法具有计算复杂度低,在相对高 SNR 和/或大数据样本下能有效地实现 SET 信号参数的精确估计.仿真数据结果证明了该算法的有效性.对多谱线 SET 信号参数估计问题,该方法不再适用,这是由 2-D 数据矩阵 \mathbf{R} 秩为 1 的特性所决定的,它已经确定了信号估计自由度为 1.针对多维参数估计问题可参考文献[20,21],该问题是后续研究工作的方向.

参考文献

- [1] Erik Gudmundson, Andreas Jakobsson, Petre Stoica. NQR-based explosives detection-an overview[A]. 2009 International Symposium on Signals, Circuits and Systems[C]. United States: IEEE Computer Society, 2009. 1-4.
- [2] 高攀,金耀辉,张国进,周新建,张小珂.基于核四极矩共振原理的炸药探测方法研究与试验[J].波谱学杂志, 2008, 25(3): 371-377.
GAO Pan, JIN Yao-hui, ZHANG Guo-jin, ZHOU Xin-jian, ZHANG Xiao-ke. An explosive detection method based on NQR[J]. Chinese Journal of Magnetic Resonance, 2008, 25(3): 371-377. (in Chinese)
- [3] Kairan Zhu, Tao Su, Xuehui He, Jinping Niu. SVD for enhanced explosives detection using NQR[A]. 2010 Symposium on Security Detection and Information Processing[C]. Langford Lane: Elsevier Ltd, 2010. 57-62.
- [4] 朱凯然,何学辉,郑小宝,苏涛.基于总体最小二乘的核四极矩共振参数估计[J].电波科学学报, 2012, 27(1): 134-140.

- ZHU Kai-ran, HE Xue-hui, ZHENG Xiao-bao, SU Tao. The estimation of NQR parameters based on total least squares[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2012, 27(1): 134-140. (in Chinese)
- [5] 赵振维,娄扬,金燕波,毛云志.基于自适应滤波技术的 NQR 信号处理[J].电波科学学报, 2008, 23(3): 429-433.
ZHAO Zhen-wei, LOU Yang, JIN Yan-bo, MAO Yun-zhi. Signal processing for NQR based on adaptive filtering[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2008, 23(3): 429-433. (in Chinese)
- [6] Yingyi Tan, Stacy L Tatum, Leslie M Collins. Cramer-Rao lower bound for estimating quadrupole resonance signals in non-gaussian noise[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2004, 11(5): 490-493.
- [7] Samuel D Somasundaram, Andreas Jakobsson, Naveed R Butt. Countering radio frequency interference in single-sensor quadrupole resonance[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2009, 6(1): 62-66.
- [8] Samuel D Somasundaram, Andreas Jakobsson, John A S Smith, Kaspar Althoefer. Exploiting spin echo decay in the detection of nuclear quadrupole resonance signals[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2007, 45(4): 925-933.
- [9] Yi Jiang, Petre Stoica, Jian Li. Array signal processing in the known waveform and steering vector case[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(1): 23-35.
- [10] Erik Gudmundson, Petre Stoica, Jian Li, Andreas Jakobsson, et al. Spectral estimation of irregularly sampled exponentially decaying signals with applications to RF spectroscopy[J]. Journal of Magnetic Resonance, 2010, (203): 167-176.
- [11] Naishadham Krishna, Piou Jean E. A novel 1-D block processing approach to 2-D NMR spectroscopy[A]. 2007 4th IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro-Proceedings[C]. New Jersey: IEEE Signal Processing Society, 2007. 1352-1355.
- [12] Naishadham K, Piou J E. A robust state space model for the characterization of extended returns in radar target signatures [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2008, 56(6): 1742-1751.
- [13] Jun Liu, Xiangqian Liu. An eigenvector-based approach for multidimensional frequency estimation with improved identifiability[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(12): 4543-4556.
- [14] 徐少坤,刘记红,魏玺章,黎湘.基于 CP-GTD 模型的三维散射中心参数估计[J].电子学报, 2011, 39(12): 2755-2760.
XU Shao-kun, LIU Ji-hong, WEI Xi-zhang, LI Xiang. Parameter estimation of 3D scattering centers based on CP-GTD model[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(12): 2755-2760. (in Chinese)
- [15] 赵学智,叶邦彦.基于二分递推 SVD 的信号奇异性位置

精确检测[J]. 电子学报, 2012, 40(1): 53 - 59.

ZHAO Xue-zhi, YE Bang-yan. Accurate detection of signal singularity position based on dichotomizing recursion SVD [J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(1): 53 - 59. (in Chinese)

[16] Jean-Michel Papy, Lieven De Lathauwer, Sabine Van Huffel. Common pole estimation in multi-channel exponential data modeling[J]. Signal Processing, 2006, (86): 846 - 858.

[17] H C So, Frankie K W Chan, W H Lau, Cheung-Fat Chan. An efficient approach for two-dimensional parameter estimation of a single-tone [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(4): 1999 - 2009.

[18] 罗鹏飞, 张文明, 刘忠, 赵艳丽. 统计信号处理基础-估计与检测理论[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003. 182 - 225.

LUO Peng-fei, ZHANG Wen-ming, LIU Zhong, ZHAO Yan-li. Fundamentals of Statistical Signal Processing Volume I: Estimation Theory and Volume II: Detection Theory [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2003. 182 - 225. (in Chinese)

[19] Jun Liu, Xiangqian Liu, Xiaoli Ma. First-order perturbation analysis of singular vectors in SVD[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(7): 3044 - 3049.

[20] Jun Liu, Xiangqian Liu, Xiaoli Ma. Multidimensional frequency estimation with finite snapshots in the presence of identical frequencies [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(11): 5179 - 5194.

[21] 汪飞, 王树勋, 陈巧霞. 基于 Hamilton 四元数矩阵奇异值分解的二维谐波频率参量估计[J]. 电子学报, 2007, 35(12): 2441 - 2445.

Wang Fei, Wang Shu-xun, Chen Qiao-xia. Parameters estimation of two-dimensional harmonics based on singular value decomposition of quaternion matrix [J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(12): 2441 - 2445. (in Chinese)

作者简介



朱凯然 男, 1982 年 8 月出生于山东省临沂市. 博士研究生. 主要研究方向为基于核四极矩共振 (Nuclear Quadrupole Resonance, NQR) 技术的爆炸物探测系统研制, NQR 信号处理, 微弱信号参数估计与检测, 雷达信号处理, 阵列信号处理.

E-mail: kairanzhu.kevin@gmail.com



何学辉 男, 1979 年 1 月生于江西省吉安市. 西安电子科技大学副教授, 硕士生导师, 研究方向为 NQR 信号处理, 信号波形优化设计, 阵列信号处理及实时信号处理.

E-mail: xhhe@mail.xidian.edu.cn

吴惠阳 男, 1976 年 5 月出生于黑龙江省双城市. 博士研究生. 主要研究方向为雷达信号处理.

E-mail: huiyangwu@qq.com

张旺 男, 1985 年 10 月出生于湖北省随州市. 博士研究生. 主要研究方向为阵列信号处理.

E-mail: zhangwang8515@163.com

苏涛 男, 1968 年生于陕西省西安市. 现为西安电子科技大学教授、博士生导师. 主要从事面向雷达、声纳、通信的高速实时信号处理, 信号处理快速算法研究, 并行处理系统设计, DSP 原理与设计, FPGA 中的 IP 设计以及 PowerPC 应用.

E-mail: sutao@xidian.edu.cn